חישוביות - שיעור 4

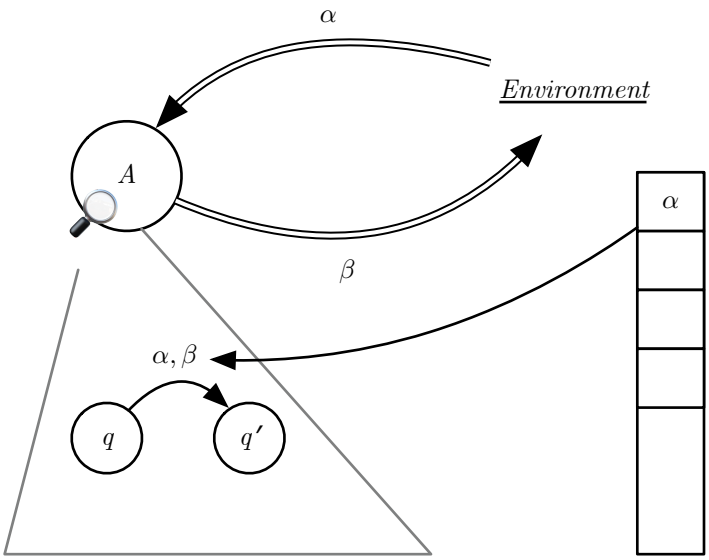
דוד קלוטה

26 באפריל 2026

הקדמה

היום נתחיל בנושא חדש, שימוש באוטומט סופי דטרמיניסטי לאו דווקא כאוטומט חישוב, אלא כאוטומט בקרה. למה הכוונה, אם חשבנו על הקלט של אוטומט סופי דטרמיניסטי כסדרת אותיות קבועה מראש, נפסיק לעשות זאת ובמקום זאת נחשוב על אוטומט שעושה אינטראקציה עם הסביבה: גם מושפע וגם משפיע על הסביבה, אשר יכולה להיות נתונה לשינוי. דוגמאות כוללות רכב שהאוטומט שולט בבלמיו, דברים יותר מופשטים - ואף אוטומטי מחסנית (אשר לא נדבר עליהם) ואוטומטי טיורינג עונים להגדרה.

האוטומט מקבל קלט מהסביבה כסדרה של אותיות, אך גם יכול להשפיע על הסביבה על ידי אותיות שיש בו בפלט.

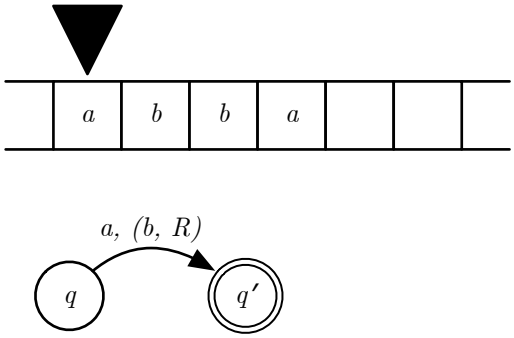


איור 1: דוגמה לאוטומט מחסנית, אוטומט שכזה

התחלנו!

4.1 מכונת טיורינג

מכונת טיורינג, אשר מזוהה עם אלן טיורינג (על אף שקיים סיכוי כי לא המציא אותה) מרחיבה את אוטומט המצבים הסופי הדטרמיניסטי באמצעות שימוש בסרט זיכרון אינסופי (מימין ומשמאל). הקלט של האוטומט רשום על סרט במצב ההתחלתי, ובעת מעבר כל מצב, האוטומט קורא מהסרט, כותב לסרט וזז שמאלה L או ימינה R.



איור 2: הדגמה של סרט זיכרון ומעבר מצבים במכונת טיורינג

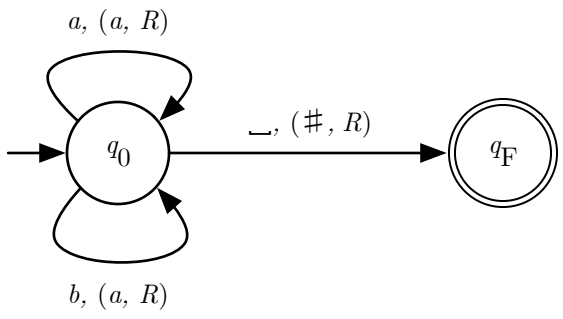
ה"קלט של החישוב הוא מילה **סופית** אשר רשומה על סרט הזיכרון בתחילת הריצה (על תאים אחרים יהיה כתוב $\sqcup$, מתפקד כמו NULL במחשבים שאנו מכירים), נאמר שאנחנו נשתדל לא לרשום אותו.

נבחין כי קראנו לקבוצת המצבים המקבלים באוטומט הסופי הדטרמיניסטי F מתוך final, מצבים **סופיים**, ללא כך שהם מצבים **מקבלים**. מה לכן יהיה ה"פלט" של האוטומט?

1. נתייחס לפלט בתור מה שכתוב על הסרט כאשר מגיעים למצב סופי.
2. במקרים אחרים, נוכל לעשות מספר מצבים הסופיים והמצב אליו הגענו הוא הפלט. לדוגמה, $q_{\text{YES}}, q_{\text{NO}} \in F$

ניתן כעת שתי דוגמאות פשוטות למכונות טיורינג, ואז נגדיר אותה פורמלית:

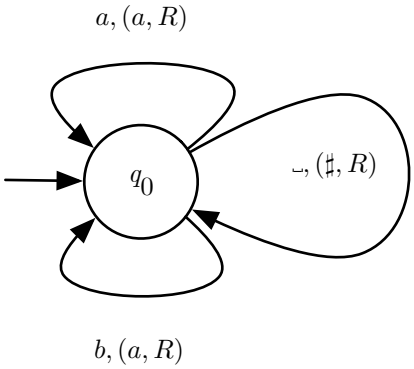
דוגמה **4.1.1.** מכונת טיורינג מעל $\Sigma = \{a, b\}$ ומחזירה מילה באותו אורך שיש בה רק a.



איור 3: האוטומט הנ"ל

נשים לב כי במצב הסופי, מכיוון שלא יכלנו לרשום $\sqcup$, רשמנו את התו $\sharp$ (נאמר דיאז, או sharp)

דוגמה **4.1.2.** דוגמה זו תהיה זהה לאוטומט מדוגמה 1, אך היא מסתיימת בלולאה אינסופית ולא עוצרת אף פעם.



איור 4: האוטומט הנ"ל - שימו לב כי הוא לא עוצר אף פעם!

הגדרה 4.1.1. מכונת טיורינג M היא שביעייה סגורה

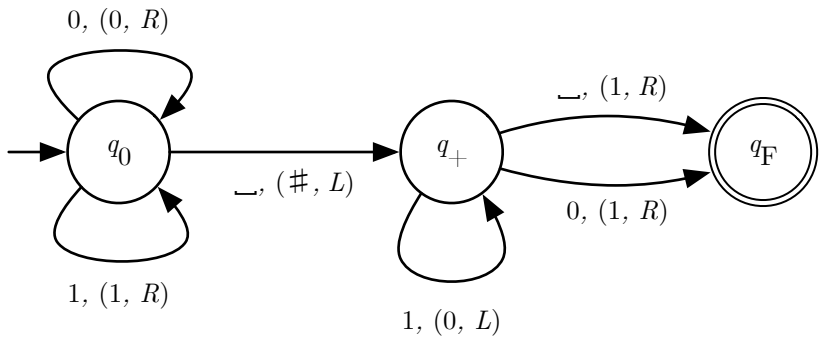
$$M \stackrel{\text{def}}{=\!=} (\Sigma, \Gamma, \sqcup, Q, q_0, F, \delta)$$

כך ש־

1. Σ - א"ב הקלט
2. $\Gamma \supseteq \Sigma$ - א"ב עבודה, מכיל גם אותיות שלא יכולות להפיע בקלט
3. $\sqcup \in \Gamma \backslash \Sigma$ - התו אשר יהיה כתוב בתאי זיכרון אשר לא נגענו בהם
4. Q קבוצת מצבים סופית
5. $q_0 \in Q$ המצב ההתחלתי של האוטומט
6. $F \subseteq Q$ - קבוצת המצבים הסופיים (final, לא finite).
7. $\delta : Q \backslash F \times \Gamma \to Q \times (\Gamma \times \{L, R\})$

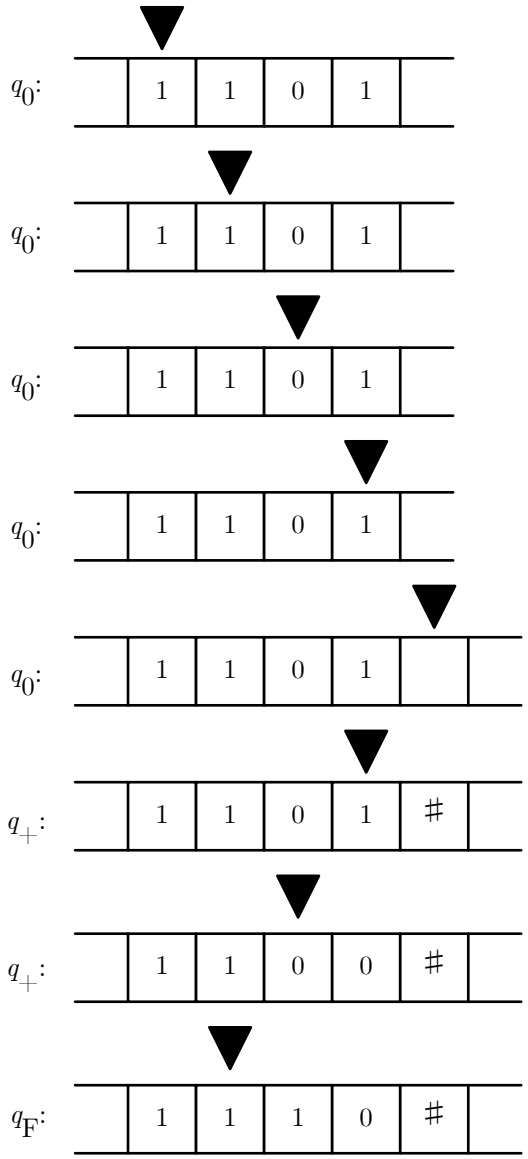
שאלה. *בנו מכונת טיורינג שמקבלת מספר בינארי (הראש הוא ב־most significant digit) ומוסיפה לו 1.*

תשובה. בטח!



איור 5: האוטומט אשר מוסיף 1 למספר בינארי

נריץ עכשיו את האוטומט על הקלט :1011



איור 6: ריצת האוטומט על הקלט 1101

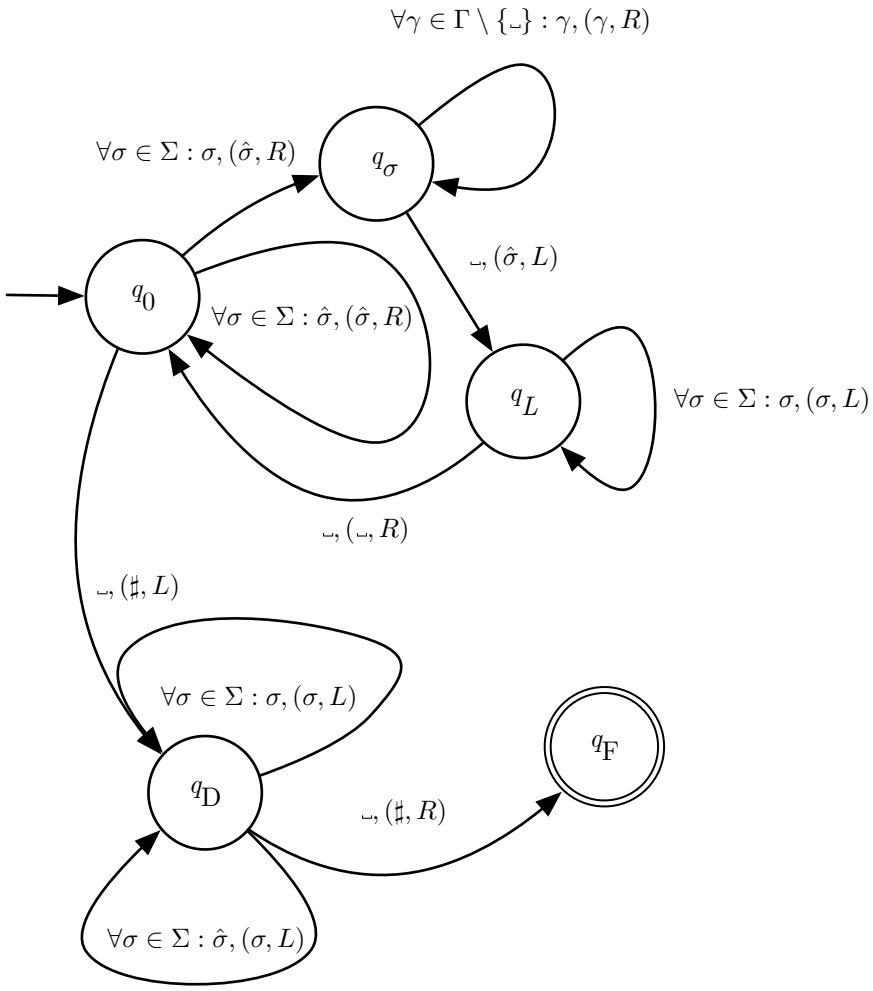
על אף שלא הגדרנו מהי ריצה פורמלית, בפועל נוכל להבין איך ריצה עובדת, סדרה של מצבים אשר בהינתן קלט כל המעברים חוקיים ומסתיימת במצב סופי.

תרגיל 4.1.1. הראו מכונת טיורינג שמקבלת $w \in \Sigma^*$ ומחזירה ww.

תשובה. הטריק שנשתמש בו על מנת לפתור זאת הוא **סימון**. נשתמש בעובדה שניתן לנו לבחור א"ב עבורד שהוא גדול יותר מא"ב הקלט, ובעצם נגדיר את א"ב העבודה שלנו בתור

$$\Gamma = \Sigma \cup \{\hat{\sigma} \mid \sigma \in \Sigma\} \times \{\sqcup, \sharp\}$$

ומכאן זו כבר משימה תכנותית:

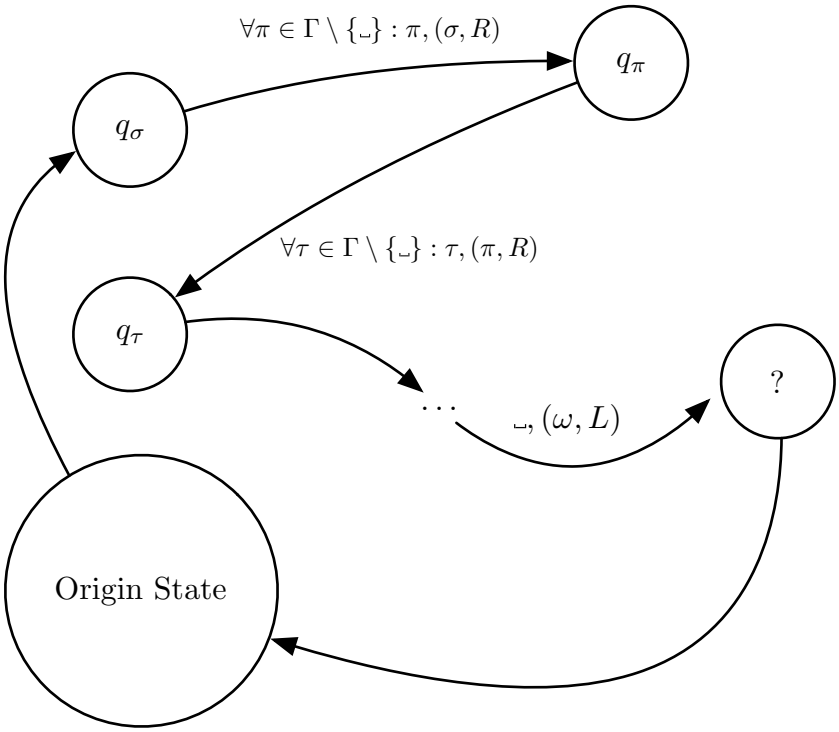


איור 7: אוטומט העושה את המשימה הנ"ל

4.2 פרוצדורות

לעיתים נרצה מאוטומט אחד "לסמלץ" הרצת אוטומט אחר. בעיה טכנית אשר ניתקל בה, היא כי עלינו לדאוג שהאוטומט החדש לא יראה רווחים. לשם כך, נשתמש בסימן כמו $\sharp$ במקום רווח על מנת לא לעשות עם זה בעיות. בעיה נוספת אשר יכולה להתרחש היא שבטעות נוכל "לדרוס" קלט של האוטומט הקודם מאוטומט אחר (בדומה ל־buffer overflow בשפות תכנות עיליות). דרך אחת (שאנו לא נעסוק בה, אך עובדת) היא להחליט שהמילה שאנו עובדים עליה באמת תהיה על התאים הזוגיים ופרוצדורות יהיו על התאים האי־זוגיים (מה שיכול להיות בעייתי עם אוטומטים המתעסקים עם כמה פרוצדורות). פתרון אפשרי (שיכול להיות בעייתי במקרים) הוא לשים את האוטומט מהפרוצדורה מצד שמאל, במקום מצד ימין. הטכניקה אשר נשתמש בפועל היא לקיחת חלק מהמילה, והעתקתה לימין ב־1. טכניקה נוספת היא שימוש ב־$\Gamma \supseteq \Sigma \times \Sigma'$ בעבור שני השפות.

ההזזה של החלק הימני של הסרט ימינה בתא אחד וכתיבת האות $\sigma \in \Sigma$ **משמאלו** להלן חלק מאוטומט המסוגל לעשות את ההזזה הזו:

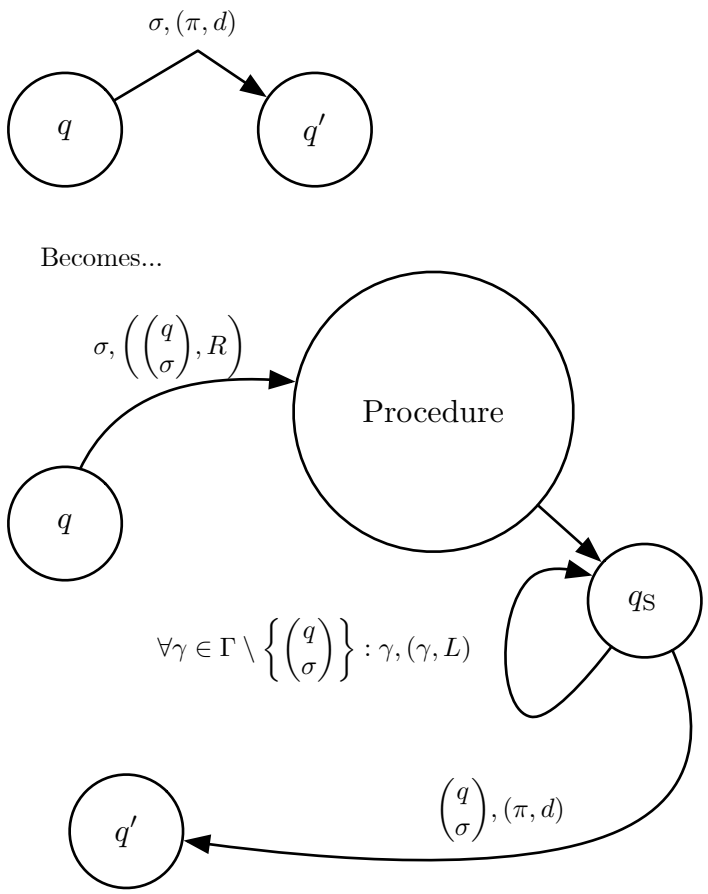


איור 8: דוגמה להזזה ימינה

יש לציין כי בקורס זה, מה שחשוב הוא **מספר צעדי החישוב**. יש אנשים שמנסים לעשות אופטימיזציה לכמות מצבים ו/או מעברים מינימלית, אך פה לא יהיה הדגש בקורס.

סימלוץ מכונת טיורינג M בעזרת מכונת טיורינג M' תוך כדי ספירת שלבי חישוב כאשר מכונה M עובדת כ־$M(w) \to w'$ בעוד שמכונה M' תעבוד בתור $M'(w) \to w'\sharp x$ כאשר x הוא מספר צעדי החישוב ומכונה M מורצת על w.

נוכל לעשות זאת על ידי הרחבת שיטת הסימון בסרט. אם א"ב העבודה של M הוא Γ, ב־M' בין השאר יהיה לנו את $\Gamma \cup \Gamma \times Q$ (בהינתן Q קבוצת המצבים של M), על מנת שיהיה ניתן להבין בקלות לאיזה מצב ב־M נחזור לאחר הרצת הפעולה הייחודית של אוטומט M'. אם היה לנו מעבר ב־M מ־q ל־q' בהינתן הקלט σ והפלט π בתזוזה d, נוכל ב־M' לעשות מעבר מ־q בהינתן σ עם הקלט $\left(\binom{q}{\sigma}, R\right)$ אל p_0, המצב ההתחלתי של אוטומט ה"פרוצדורה", המסמלץ את M.



איור 9: האוטומט העושה את הנ"ל